Seri bahan kuliah Algeo #16

Ruang Vektor Umum
(bagian 3)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matriks m x n sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Kita dapat membentuk dari matriks A:

  (1) **Vektor baris**: vektor yang dibentuk dari baris-baris matriks

  (2) **Vektor kolom**: vector yang dibentuk dari kolom-kolom matriks

- Vektor-vektor baris dari matriks A:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \\ \mathbf{r}_2 &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{r}_m &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ vektor-vektor di R^n

- Vektor-vektor kolom dari matriks A:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ vektor-vektor di R^m

Contoh 1: Diberikan matriks A sebagai berikut A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

Vektor-vektor barisnya adalah

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r_3} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor kolomnya adalah

$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c_4} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$

DEFINISI

- Jika A adalah matriks m x n, maka subruang dari R^n yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari A dinamakan **ruang baris** (*row space*) matriks A.

- Subruang dari R^m yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari A dinamakan **ruang kolom** (*column space*) matriks A.

- Ruang solusi sistem persamaan linier homogen A**x** = 0, yang merupakan subruang dari R^n, dinamakan **ruang null** (*null space*) matriks A.

Contoh 2 (Ruang null): Tentukan ruang null untuk matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Jawaban</u>: Untuk menentukan ruang null, selesaikan SPL homogen A**x** = 0 berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan metode eliminasi Gauss/Gauss-Jordan, diperoleh solusinya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

atau dinyatakan sebagai $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$

yang dalam hal ini, $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$

Ruang solusi yang dibentuk oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ disebut **ruang null**

Teorema. Sebuah SPL A**x** = **b** disebut **konsisten** jika dan hanya jika **b** adalah kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A, dengan kata lain **b** berada di dalam ruang kolom matriks A.

Contoh 3: Tinjau SPL berikut ini

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -9 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solusinya dengan metode eliminasi Gauss adalah $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Solusi ini dapat dinyatakan sebagai

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Jadi, **b** merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor kolom matriks A

Basis untuk Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

- Misalkan A adalah matrik berukuran m x n.
- Bagaimana menentukan basis untuk ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks A?
- Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

  1. Lakukan reduksi baris pada A dengan menerapkan OBE sampai menghasilkan matriks eselon baris R
  2. Basis untuk ruang baris dari A adalah semua vektor baris yang mengandung 1 utama pada matriks R
  3. Basis untuk ruang kolom dari A adalah semua vektor kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan vektor kolom matriks R yang mengandung 1 utama.
- Basis untuk ruang null adalah adalah vektor-vektor yang membangun ruang solusi SPL homogen A*x* = 0

Contoh 4: Tentukan basis untuk ruang baris, basis untuk ruang kolom, dan basis untuk ruang null dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Jawaban</u>: Lakukan reduksi baris pada matriks A dengan operasi baris elementer sbb:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \cdots \sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis untuk ruang baris adalah semua baris matriks R yang mengandung 1 utama:

$$\mathbf{r_1} = [1 \quad -3 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 4]$$
$$\mathbf{r_2} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad -2 \quad -6]$$
$$\mathbf{r_3} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5]$$

→ Dimensi ruang baris = 3

Basis untuk ruang kolom adalah semua kolom dari matriks A yang berkoresponden dengan kolom matriks R yang mengandung 1 utama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Jadi, basis untuk ruang kolom adalah

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Dimensi ruang kolom = 3

Dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom

Untuk menemukan basis ruang null, tentukan solusi A**x** = 0 sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \; \cdots \; \sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriks augmented

Dari matriks augmented yang terakhir diperoleh tiga persamaan sbb:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 6x_6 = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$x_5 + 5x_6 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Dari (iii) diperoleh: $x_5 = -5x_6$

Dari (ii) diperoleh: $x_3 = -3x_4 + 2x_5 + 6x_6 = -3x_4 + 2(-5x_6) + 6x_6 = -3x_4 - 4x_6$

Dari (i) diperoleh: $x_1 = -3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - 4x_6 = -3x_2 - 4(-3x_4 - 4x_6) + 2x_4 - 5(-5x_6) - 4x_6 = -3x_2 + 14x_4 + 22x_6$

Misalkan $x_2 = r$, $x_4 = s$, dan $x_6 = t$, maka

$x_1 = –3x_2 + 14x_4 + 22x_6 = –3r + 14s + 22t$

$x_3 = –3x_4 – 4x_6 = –3s – 4t$

$x_5 = –5t$

Solusi A**x** = 0 dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r + 14s + 22t \\ r \\ -3s \ - 4t \\ s \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14s \\ 0 \\ -3s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22t \\ 0 \\ -4t \\ 0 \\ -5t \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$\mathbf{v_1}$ = (–3, 1, 0, 0, 0, 0), $\mathbf{v_2}$ = (14, 0, –3, 1, 0, 0), dan $\mathbf{v_3}$ = (22, 0, –4, 0, –5, 0)

Dimensi ruang null = 3

- Kita juga dapat menemukan basis untuk ruang vector di R^n dengan menggunakan operasi baris elementer. Perhatikan contoh 5 di bawah ini.

Contoh 5: Tentukan basis untuk subruang dari R^5 yang dibangun oleh vektor-vektor

$\mathbf{v_1}$ = (1, –2, 0, 0, 3), $\mathbf{v_2}$ = (2, –5, –3, –2, 6), $\mathbf{v_3}$ = (0, 5, 15, 10, 0), dan $\mathbf{v_4}$ = (2, 6, 18, 8, 6)

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \sim \overset{\text{OBE}}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Basis adalah semua baris dari R yang mengandung 1 utama, yaitu:

$\mathbf{w_1}$ = (1, –2, 0, 0, 3), $\mathbf{w_2}$ = (0, 1, 3, 2, 0), dan $\mathbf{w_3}$ = (0, 0, 1, 1, 0)

Dimensi = 3

Rank dan Nullity

- *Rank* matriks A, ditulis sebagai *rank*(*A*), didefinisikan sebagai dimensi ruang baris atau dimensi ruang kolom dari matriks A.
- Ingat kembali bahwa dimensi ruang baris = dimensi ruang kolom
- *Nullity* matriks A, ditulis sebagai *nullity*(*A*), didefinisikan sebagai dimensi ruang null dari matriks A.
- Untuk matriks A dengan *n* kolom, berlaku hubungan sbb:

$$\boxed{rank(A) + nullity\,(A) = n}$$

- Rank matriks A juga dapat diartikan juga sebagai

  = jumlah baris tidak-nol pada matriks eselon dari hasil reduksi baris matriks A.

  = jumlah variabel utama (variable non-parameter) pada solusi umum Ax = 0

- Nullity matriks A dapat diartikan sebagai jumlah parameter di dalam solusi umum Ax = 0

THEOREM 4.8.3 *If A is an $m \times n$ matrix, then*

(a) $\text{rank}(A) =$ *the number of leading variables in the general solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) $\text{nullity}(A) =$ *the number of parameters in the general solution of* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Contoh 6: Tinjau kembali matriks A pada Contoh 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Ukuran mariks A adalah 4 x 6 (m = 4, n = 6). Sudah dihitung pada Contoh 4 bahwa dimensi ruang baris = 3, dimensi ruang kolom = 3, dan dimensi ruang null = 3, maka

rank(A) = 3

nullity(A) = 3

rank(A) + nullity(A) = n $\rightarrow$ 3 + 3 = 6

Contoh 17: Tentukan *rank* dan *nullity* matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \;\dots\; \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank(A) juga dapat dihitung dari jumlah baris tidak-nol pada matriks hasil OBE. Ada dua baris tidak-nol pada matriks hasil OBE di atas, maka *rank*(*A*) = 2.

Nullity dihitung sbb: *nullity*(A) = *n* – *rank*(*A*) = 6 – 2 = 4

Untuk membuktikan bahwa *nullity*(A) = 4, maka selesaikan terlebih dahulu A**x** = 0,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim \cdots \sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* yang terakhir diperoleh dua persamaan sbb:

$$x_1 \quad - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Dari (ii) diperoleh: $x_2 = 2x_3 - 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$

Dari (i) diperoleh: $x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$

Misalkan $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = u$, maka solusi A**x** = 0 dinyatakan sebagai vektor:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r + 28s + 37t \ - 13u \\ 2r + 12s + 16t - 5u \\ r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \ u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis untuk ruang null adalah:

$\mathbf{v_1}$ = (4, 2, 1, 0, 0, 0), $\mathbf{v_2}$ = (28, 12, 0, 0, 1, 0), $\mathbf{v_3}$ = (37, 16, 0, 0, 1, 0), dan
$\mathbf{v_4}$ = (–13 , –5, 0, 0, 0, 1)

Dimensi ruang null = 4, sehingga *nullity*(A) = 4

Nullity(A) = 4 juga berarti jumlah parameter pada solusi umum Ax = 0 adalah 4 (pada kasus ini parameter solusi adalah r, s, t, dan u, semuanya elemene bilangan riil)

THEOREM 4.8.4 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A *is invertible.*

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *has only the trivial solution.*

(c) *The reduced row echelon form of* A *is* I_n.

(d) A *is expressible as a product of elementary matrices.*

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *is consistent for every* $n \times 1$ *matrix* $\mathbf{b}$.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *has exactly one solution for every* $n \times 1$ *matrix* $\mathbf{b}$.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) *The column vectors of* A *are linearly independent.*

(i) *The row vectors of* A *are linearly independent.*

(j) *The column vectors of* A *span* R^n.

(k) *The row vectors of* A *span* R^n.

(l) *The column vectors of* A *form a basis for* R^n.

(m) *The row vectors of* A *form a basis for* R^n.

(n) A *has rank* n.

(o) A *has nullity* 0.

Latihan

1. (soal kuis tahun 2019)

Diberikan matriks berukuran 3x3 sbb :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a). Basis dari ruang kolom
b). Basis dari ruang baris
c). Basis dari ruang null